令和5年度（令和5年4月入学）
博士前期課程（修士課程）一般入試（第Ｉ期）
機械物理学専攻
機械設計学専攻

数　　学 （90分）

〔注意事項〕

1. 監督者の指示があるまで，問題冊子（この冊子）を開いてはいけません。
2. 配布物は，この問題冊子1部，解答用紙3枚と計算用紙1枚です。
3. **解答用紙には志望専攻名，受験番号を記入する欄がそれぞれ1箇所ずつあります。監督者の指示に従って，すべての解答用紙（合計3枚）の志望専攻名欄と受験番号欄に志望専攻名と受験番号を記入しなさい。**
4. **解答は，問題番号に対応する解答用紙の指定された場所に書きなさい。解答を解答用紙の裏面に書いてはいけません。解答用紙，計算用紙の追加，交換はしません。**
5. **問題は全部で3問あり，2ページにわたって印刷されています。落丁・乱丁および印刷の不鮮明な箇所などがあれば，手をあげて監督者に知らせなさい。**
6. 問題冊子の白紙と余白は，計算などに使用してもよろしい。
7. **解答用紙は，持ち帰ってはいけません。**
8. 問題冊子と計算用紙は，持ち帰りなさい。

1 実 2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

が

$$AB = BA$$

を満たすとする。また，E は 2 次単位行列を表す。ただし，(2), (3) では実 2 次正方行列の全体 $M_2(\boldsymbol{R})$ は行列の通常の和と実数倍で実線形空間をなすことを用いよ。

(1) q の値を求めよ。また，$p = s$ が成り立つことを示せ。

(2) $M_2(\boldsymbol{R})$ において，B を A, E の一次結合で表せ。

(3) $M_2(\boldsymbol{R})$ において，A, E は一次独立であるかどうか調べよ。

2 xy 平面上で定義された関数 $f(x,y) = x^4 - 2xy + y^3 - 5$ について，次の問いに答えよ。

(1) $x = 1$ の近くで定義された x の C^1 級関数 $y = \varphi(x)$ であって，$x = 1$ の近くで $f(x, \varphi(x)) = 0$ であり，かつ $\varphi'(1) = 0$ を満たすものが存在することを陰関数定理を用いて示せ。

(2) (1) の $\varphi(x)$ に対し，$\varphi(x)$ が $x = 1$ において極大値をとるか，極小値をとるか，どちらでもないか調べよ。

$\boxed{3}$ a を実数とし，$a > 4$ とする。関数 $y = y(x)$ に対する次の微分方程式を考える。

$$(*) \qquad y'' + 4y' + ay = 0$$

(1) 条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ を満たす $(*)$ の解 y を求めよ。

(2) 条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y(1) = 0$ を満たす $(*)$ の解 y が存在するような a の値をすべて求めよ。

（以上）

令和５年度　大学院工芸科学研究科博士前期課程（修士課程）

一般入試第Ⅰ期

入学試験学力検査問題

機械物理学専攻
機械設計学専攻

専門科目

注　意

（1）問題番号［1］～［8］の中から４問を選択すること。選択した問題番号を解答用紙左上の［　］に必ず記入し、その問題番号の解答を解答用紙に記入すること。

（2）解答用紙には、受験番号、問題番号と解答のみを記入すること。
その他のことを記入してあるものは無効とする。

（3）解答を解答用紙裏面に書かないこと。

令和４年８月22日

［1］ 図 1 のように，剛体板に取り付けられた大径部および小径部の直径がそれぞれ D および $2D/3$，長さが共に L の段付き丸棒と，外径，内径および長さがそれぞれ D，$2D/3$ および h の剛体床上に置かれた円筒がある．段付き丸棒および円筒の縦弾性係数はそれぞれ E_1 および E_2 である．段付き丸棒の大径部，小径部および円筒はそれぞれ軸方向にのみ一様に変形するものとして，以下の問いに答えなさい．ただし，円筒の長さ h は L より十分大きいものとし，段付き丸棒と円筒の間に生じる摩擦および重力の影響は考えないものとする．

(1) 図 2 のように段付き丸棒の小径部の下端から荷重 P を負荷した状態で，剛体板を移動することによって段付き丸棒を大きさが無視できる一定の速度でゆっくりと円筒に押し込む．段付き丸棒と円筒の上端が接触していない時，段付き丸棒の小径部に生じる応力を求めなさい．

(2) このとき，段付き丸棒の大径部の縮み量を求めなさい．

その後，図 3 のように段付き丸棒が円筒の上端と接触し，段付き丸棒の大径部の上端に荷重 Q が負荷された状況となった．

(3) 段付き丸棒の大径部に生じる応力を求めなさい．

(4) 円筒の縮み量を求めなさい．

この状態で，図 4 のように剛体板を固定し，荷重 P を取り除いた．

(5) 段付き丸棒の大径部に生じる応力を求めなさい．

(6) 変形後の円筒の長さ h' を求めなさい．

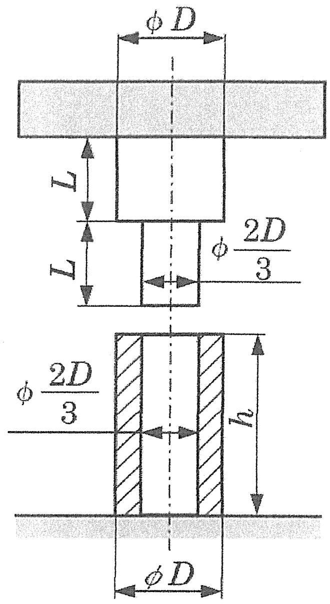


図1

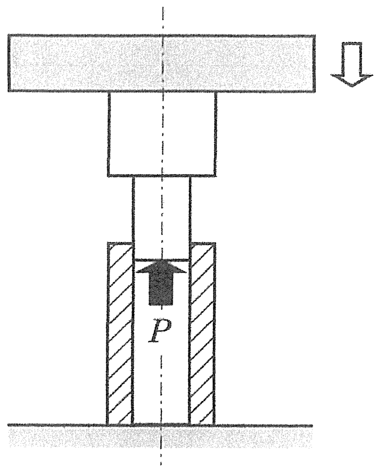


図2

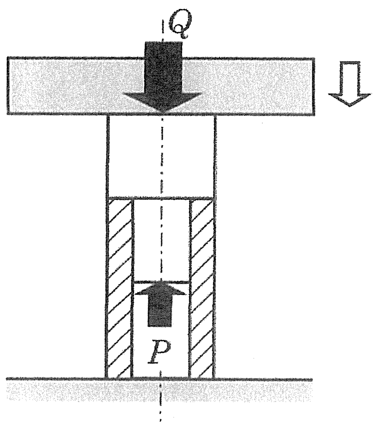


図3

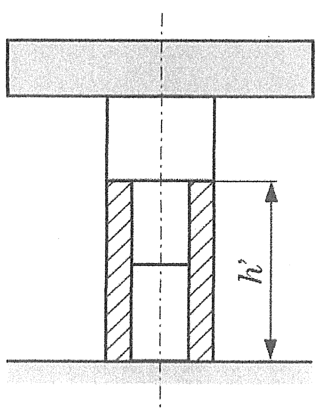


図4

［2］　図１に示すように，自重が無視できる長さ L の両端支持はりがあり，左端から a の位置に集中荷重 W が作用している．はりの断面は図２に示すような形状である．左端から図１の方向に x をとるとき，以下の問いに答えなさい．

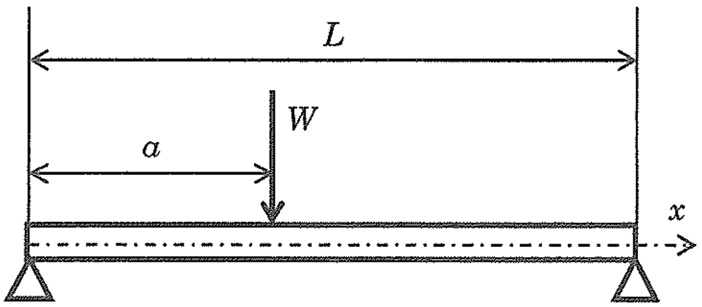


図１

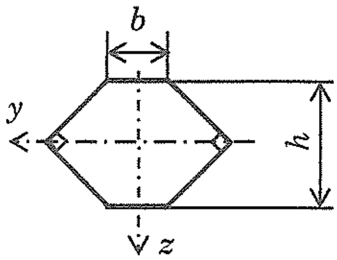


図２

(1) 左端および右端における反力をそれぞれ求めなさい．

(2) せん断力 $Q(x)$を求めなさい．さらに，せん断力図(SFD)を描きなさい．

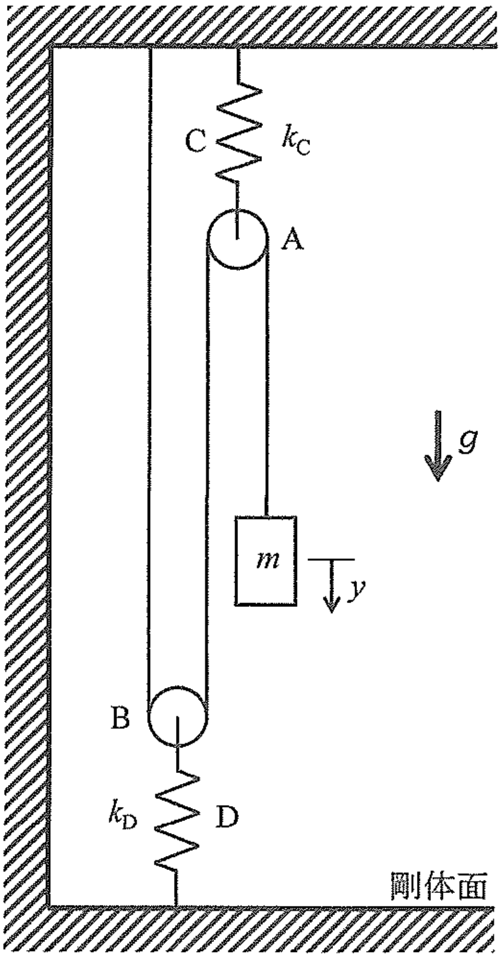
(3) 曲げモーメント $M(x)$を求めなさい．さらに，曲げモーメント図(BMD)を描きなさい．

(4) このはりの縦弾性係数を E，断面二次モーメントを I とするとき，はりのたわみ $w(x)$を求めなさい．

(5) I を求めなさい．

［3］　下図に示すように，質量 m の荷物が 2 つの摩擦の無視できる滑車を介してロープで支持されている．滑車 A と滑車 B はそれぞれ剛体面からばね定数 k_C, k_D の線形ばね C と D で支持されており，鉛直方向にのみ移動可能であるとする．滑車，ばね，ロープの質量は，荷物の質量 m と比較して無視できるほど小さく，ロープには伸びやたわみが生じないものとする．時刻 t における鉛直下向きの変位を $y(t)$ とし，$y=0$ を重力加速度 g のみを受けるときの荷物の平衡点とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 平衡状態にある荷物を力 P で鉛直下向きに移動させたときの，平衡状態からのばね C, D の伸び ΔL_C, ΔL_D をそれぞれ P, k_C, k_D を用いて表しなさい．
(2) 重力以外の外力を受けない場合のこの系の $y(t)$ に関する運動方程式を，$y(t)$ とその導関数，m, k_C, k_D を用いて表しなさい．
(3) この系の固有円振動数 ω_n を求めなさい．
(4) 時刻 $t=0$ の荷物の変位および速度をそれぞれ $y(0)=y_0$, $\dot{y}(0)=v_0$ とするとき，自由振動の変位 $y(t)$ を y_0, v_0, ω_n を用いて表しなさい．



図

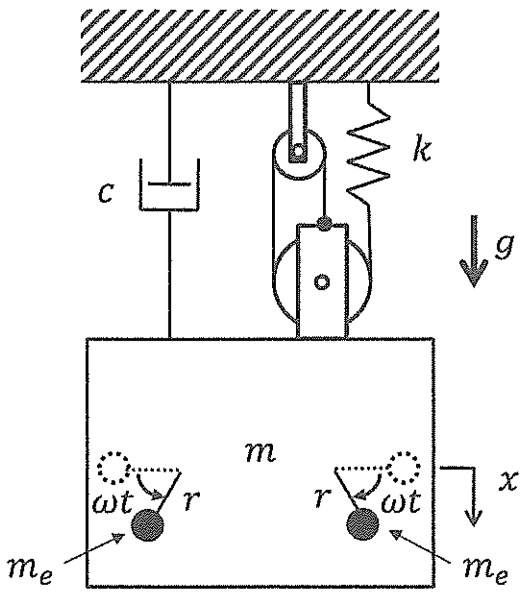
［４］　下図に示すように質量mのおもりが２つの滑車とロープを介してばね定数kのばねで吊るされており，並列に減数係数cのダッシュポットが取り付けられている．さらにおもりには偏心量rで互いに反対の方向に一定の角速度ωで回転する２個の質量m_eの鉛直方向加振機が設置されている．このとき２個の質量m_eの鉛直方向の位置は同期しており同じであるとする．また，おもりは質点と考えることができるとし，２つの滑車とロープの質量，大きい滑車の支持具の質量，回転軸に発生する摩擦，及びロープの伸びは無視できるとし，ロープはたるまずにばねの復元力を伝えられるものとする．おもりはガイドにより鉛直方向のみに滑らかに移動可能であるとし，重力加速度gのみを受けるときの平衡位置からの鉛直下向きの変位を$x(t)$とした場合，以下の問いに答えなさい．

(1) この系の運動方程式を求めなさい．

(2) この系の固有円振動数ω_nおよび減衰比ζを求めなさい．

(3) おもりの定常変位振幅Aを角速度ωの関数として求めなさい．

(4) 鉛直方向加振機の角速度を$\omega=\omega_n$と$\omega=\infty$としたときの変位振幅の比$A(\omega_n)/A(\infty)$が５倍となる場合について，減衰比ζの大きさを求めなさい．



図

［5］　図に示すように，可動壁によって内部がA室とB室に分かれているストッパー付きの剛体容器がある．A室とB室にはそれぞれ単位質量の同じ種類の理想気体が充填され，剛体容器全体は断熱されている．可動壁は硬い断熱材でできており，ストッパーの右側を気密性を保ちながら摩擦なしに動くことができる．また，A室にはヒーターが取り付けられており，A室の気体を準静的に加熱することができる．初め，可動壁はストッパーに接しており，A室の気体の圧力はp，体積はV，B室の気体の圧力は$2p$，体積はVであった．このときの状態を状態1として，以下の問いに答えなさい．ただし，容器内の理想気体の比熱は温度に依存せず一定であるとし，比熱比はκ，気体定数はRとする．また，可動壁の質量，ヒーターとストッパーの体積は無視できるものとする．

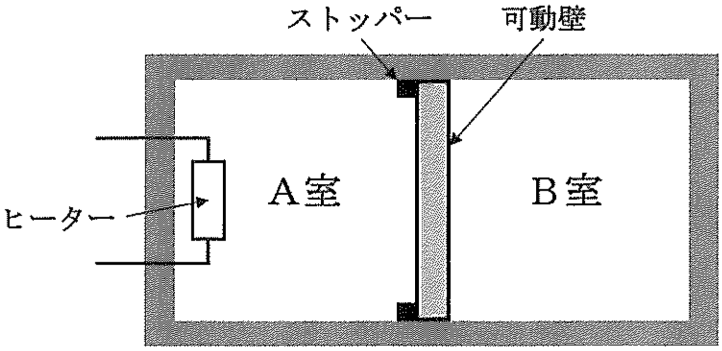
(1) 状態1におけるA室とB室の気体の温度をそれぞれ求めなさい．

状態1の後，ヒーターを用いてA室の気体を加熱したところ，可動壁は右に動き始めた．可動壁が動き始める瞬間の状態を状態2とする．

(2) 状態2におけるA室の気体の温度と圧力を求めなさい．
(3) 状態1から状態2までの間に，A室の気体がヒーターから得た熱量を求めなさい．

状態2の後，A室の気体への加熱を継続すると，可動壁はゆっくりと右側へ移動し，B室の気体の体積が$\dfrac{1}{2}V$になったところで加熱を止めた．加熱を止めたときの状態を状態3とする．

(4) 状態3におけるB室の気体の温度と圧力を求めなさい．
(5) 状態2から状態3までの間に，B室の気体が可動壁からされた仕事を求めなさい．
(6) 状態2から状態3までの間に，A室の気体がヒーターから得た熱量を求めなさい．
(7) 状態1から状態3までの間の，A室の気体のエントロピー変化を求めなさい．



図

［6］　図に示すような空気標準のブレイトン再生サイクルを考える．サイクルの作動流体は単位質量流量の空気であり，定圧比熱は c_p，比熱比は κ とする．なお，図中には，サイクルの各位置における空気の状態を指し示すための数字を配置している．再生器では，タービンから排出された空気と圧縮機から排出された空気との間で，理想的な熱交換が行われる．圧縮機の圧力比を φ，状態 1 の空気の温度を T_1，状態 3 の空気の温度を T_3 で表すとき，以下の問いに答えなさい．ただし，本問では，T_1 と T_3 はそれぞれ一定とする．

(1) 状態 4 の空気の温度 T_4 を，T_3，φ，κ を用いて表しなさい．

(2) 空気が加熱器から単位時間あたりに受け取る熱量 $\dot{Q}_{in}$ を，T_3，φ，c_p，κ を用いて表しなさい．

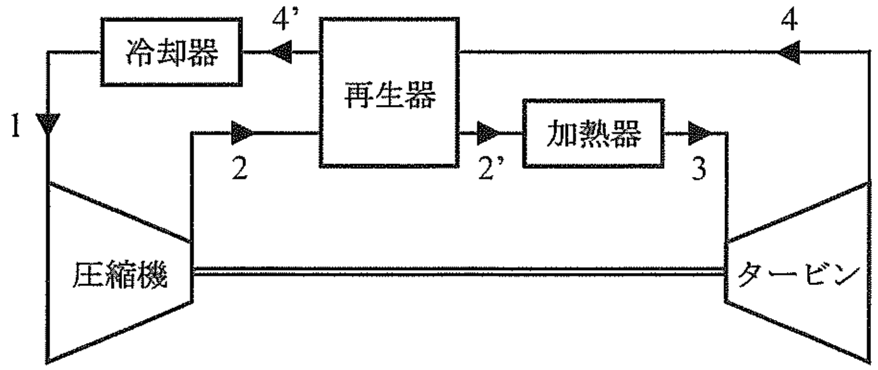
(3) サイクルの正味の出力 $\dot{W}_{net}$ を，T_1，T_3，φ，c_p，κ を用いて表しなさい．

(4) サイクルの熱効率 η を，T_1，T_3，φ，κ を用いて表しなさい．

(5) η と φ の関係を，縦軸を η，横軸を φ としたグラフに描きなさい．

(6) 再生器において，タービンから排出された空気の熱を回収するためには，圧力比 φ はある値 φ_p よりも低く設定しなければならない．φ_p を T_1，T_3，κ を用いて表しなさい．

(7) 圧力比 φ が φ_p よりも低いときの，サイクルの $T-S$ 線図（温度 T とエントロピー S の関係を示した図）を描きなさい．なお，図中には，空気の状態を指し示す数字（1，2，2'，3，4，4'）を記すこと．



図

［7］　図に示すように，水が水平方向に流れる流れ場において，水面が急に変わる跳水と呼ばれる現象がある．このような現象において，本来流れ方向に垂直な断面 B と断面 C の間では水面高さに変化を伴うが，ここでは水面は直線とし，圧力は静水圧分布になっているものとする．また，AB 間および CD 間各区間での水面高さは一定であり，それぞれ h_1 および h_2 とする．同様に AB 間および CD 間各区間での流速も一定とし，それぞれ u_1 および u_2 とする．紙面に垂直な方向の長さは単位長さ，重力加速度を g，水の密度をρ，跳水による損失ヘッドを　Δh とするとき，以下の問いに答えなさい．ただし，水平方向および鉛直方向は，それぞれ図中に示した x および y の矢印の向きを正としている．

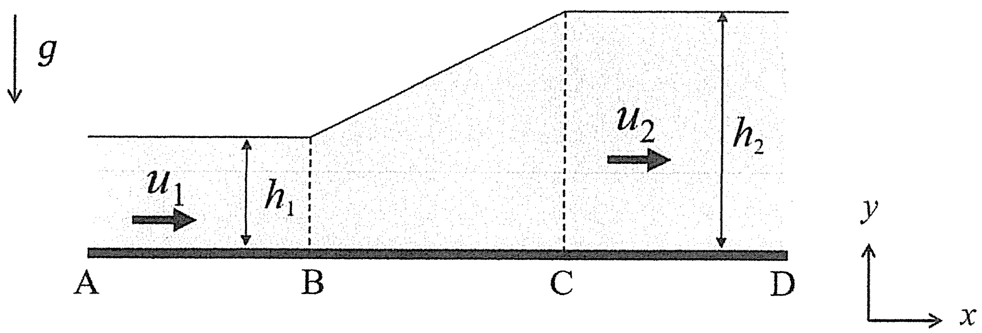
(1) 断面 A および断面 D を単位時間に通過する水の質量をそれぞれ m_1 および m_2 としたとき，m_1 および m_2 を求めなさい．

(2) BC 間における水面高さの変化は，断面 B および断面 C に作用する水圧差によるものである．各断面に作用する圧力による x 方向の力 F_1 および F_2 を求めなさい．

(3) BC 間における運動量方程式を，F_1，F_2，u_1，u_2 および m_1 を用いて表しなさい．

(4) 跳水による損失ヘッド Δh を，h_1，h_2，u_1 および u_2 を用いて表しなさい．

(5) h_2 が h_1 の２倍の高さであった時，損失ヘッド Δh は h_1 の何倍となるかを示しなさい．



［８］　図に示すようなデカルト座標系において，点 $P(x,y)$ を中心として各辺が微小長さ δx, δy（奥行長さ１）の微小矩形要素を考える．この微小要素に対する非圧縮性粘性流体の２次元流れに関して，以下の問いに答えなさい．ただし，時間を t とし，点 $P(x,y)$ における流体の密度を ρ，速度ベクトルを $\mathbf{v}=(u,v)$，圧力を p とし，粘性係数 μ は一定，体積力は作用しないものとする．また，非圧縮性流れの連続の式は満足されているものとし，連続の式を考慮した結果を導出するものとする．

(1) 微小矩形要素の質量を求めなさい．

(2) 流体運動の加速度 du/dt が実質微分（Du/Dt）で与えられることを示しなさい．

(3) ２次元の応力テンソル σ_{ij} の成分（$\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{yy}$）を求めなさい．

(4) 微小矩形要素に作用する面積力の x 及び y 方向成分を求めなさい．

(5) 以上より，２次元非圧縮性ナビエ・ストークス方程式を導出しなさい．